KTH, Matematik

**Lösning till lappskrivning 2, gul version, Linjär algebra SF1604, CDATE1**

1. Bestäm samtliga värden på det reella talet $\lambda \in \mathbb{R}$ för vilka följande matris $A$ är inverterbar:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & \lambda & 0 & -1 \\ 1 & 7 & 2 & 6 \\ 4 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
**Lösning:** Vi börjar med att beräkna matrisens determinant: Vi utvecklar $A$ efter tredje kolon och får
$$\det(A) = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$
Om vi nu utvecklar den sista $3 \times 3$ matris efter den andra kolon får vi
$$\det(A) = 2 \cdot \left[ \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - (-3) \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right] = 2(\lambda - 3).$$
Matrisen $A$ är inverterbar om och endast om $\det(A) \neq 0$, alltså om och endast om $\lambda \neq 3$.

2. Låt $A = (1,1,1)$, $B = (4,1,-2)$ och $C = (0,2,0)$ vara tre punkter i $\mathbb{R}^3$. Hitta en ekvation för planet $P$ som innehåller punkterna $A, B$ och $C$, och bestäm om planet $P$ inhåller punkten $A + B + C$.
**Lösning:** Vektorer
$$v = B - A = (4,1,-2) - (1,1,1) = (3,0,-3)$$
och
$$w = C - A = (0,2,0) - (1,1,1) = (-1,1,-1)$$
är parallel till planet $P$. Därmed är deras kryssprodukt
$$v \times w = (3,6,3)$$
vinkelrätt till planet. Då $3 \cdot (1,2,1) = (3,6,3)$ är vektoren $n = (1,2,1)$ också normal till planet $P$, och eftersom $A = (1,1,1)$ tillhör planet är planets ekvation
$$1 \cdot (x-1) + 2 \cdot (y-1) + 1 \cdot (z-1) = x + 2y + z - 4 = 0.$$

Punkten $A + B + C = (5, 4, -1)$ uppfyller inte planets ekvation:

$$5 + 2 \cdot 4 + (-1) - 4 = 8.$$

Därmed tillhör $A + B + C$ inte planet $P$.