KTH, Matematik

Lösning till lappskrivning 1, rosa version, Linjär algebra SF1604, CDATE1

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x & +y & +2z & = & 5 \\ x & +3y & +6z & = & 11 \\ 3x & +4y & -2z & = & 18. \end{cases}$$

Svar: Gauss elimination ger:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 11 \\ 3 & 4 & -2 & 18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -8 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \end{pmatrix},$$

så att ursprungliga ekvationssystemet är ekvivalent till systemet

$$\begin{cases} x & +y & +2z & = & 5 \\ & y & +2z & = & 3 \\ & & -10z & = & 0. \end{cases}$$

Från tredje ekvationen, får vi att $z = 0$. Om vi sätter in $z = 0$ i andra ekvationen får vi $3 = y + 2z = y$. Om vi sätter in $z = 0$ och $y = 3$ i första ekvationen får vi att $x = 2$. Lösningen till ekvationssystemet är alltså

$$x = 2,\ y = 3,\ z = 0.$$

2. Låt A och B vara två matriser av typ $n \times n$ sådana att $I - AB$ är inverterbar. Visa att då är också $I - BA$ inverterbar med inversen $I + B(I - AB)^{-1}A$.

Svar: Låt C vara matrisen $C = I + B(I - AB)^{-1}A$. Vi beräknar

$$\begin{aligned} (I - BA)C &= (I - BA)(I + B(I - AB)^{-1}A) \\ &= (I - BA) + \underbrace{(I - BA)B}_{B-BAB=B(I-AB)}(I - AB)^{-1}A \\ &= (I - BA) + B\underbrace{(I - AB)(I - AB)^{-1}}_{I}A \\ &= I - BA + BIA = I - BA + BA = I. \end{aligned}$$

Från Sats 1.6.3 (i Kursboken) följer nu att C är inversen till $I - BA$ och $I - BA$ är alltså inverterbar. I stället för att använda Sats 1.6.3, kan man också beräkna att

$$C(I - BA) = I$$

och komma till samma slutsats.