KTH, Matematik

Lösning till lappskrivning 1, rosa version, Linjär algebra SF1604, CDATE1

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x & +y & -2z & = & 3 \\ x & -y & +8z & = & -1 \\ 2x & +3y & +z & = & 8. \end{cases}$$

Svar: Gauss elimination ger:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 8 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 10 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix},$$

så att ursprungliga ekvationssystemet är ekvivalent till systemet

$$\begin{cases} x & +y & -2z & = & 3 \\ & y & -5z & = & 2 \\ & & -10z & = & 0. \end{cases}$$

Från tredje ekvationen, får vi att $z = 0$. Om vi sätter in $z = 0$ i andra ekvationen får vi $2 = y - 5z = y$. Om vi sätter in $z = 0$ och $y = 2$ i första ekvationen får vi att $x = 1$. Lösningen till ekvationssystemet är alltså

$$x = 1, \; y = 2, \; z = 0.$$

2. Låt A och B vara två matriser av typ $n \times n$ sådana att $I - BA$ är inverterbar. Visa att då är också $I - AB$ inverterbar med inversen $I + A(I - BA)^{-1}B$.

Svar: Låt C vara matrisen $C = I + A(I - BA)^{-1}B$. Vi beräknar

$$\begin{aligned} (I - AB)C &= (I - AB)(I + A(I - BA)^{-1}B) \\ &= (I - AB) + \underbrace{(I - AB)A}_{A - ABA = A(I - BA)} (I - BA)^{-1}B \\ &= (I - AB) + A\underbrace{(I - BA)(I - BA)^{-1}}_{I}B \\ &= I - AB + AIB = I - AB + AB = I. \end{aligned}$$

Från Sats 1.6.3 (i Kursboken) följer nu att C är inversen till $I - AB$ och $I - AB$ är alltså inverterbar. I stället för att använda Sats 1.6.3, kan man också beräkna att

$$C(I - AB) = I$$

och komma till samma slutsats.