KTH Teknikvetenskap

SF1620 Matematik och modeller
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 4, 2007

Uppgift

a) Bestäm arean mellan graferna för funktionerna $f(x) = 1/x$ och $g(x) = 3/(x+3)$ på intervallet $1 \le x \le 3$. Ange svaret som ett närmevärde med två decimalers noggrannhet. **(4)**

b) Använd variabelbytet $t = \cos x$ för att beräkna det exakta värdet av integralen

$$\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^4 x \, dx.$$

(3)

c) Beräkna det fel man får vid användning av trapetsmetoden med fyra delintervall för ett andragradspolynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ på intervallet $0 \le x \le 3$. **(2)**

Lösningsförslag

a) För att se vilken av graferna som ligger över den andra letar vi först efter värden då graferna skär varandra, dvs när funktionerna är lika. Vi har att

$$f(x) = g(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{x} = \frac{3}{x+3}.$$

Eftersom varken $x = 0$ eller $x + 3 = 0$ i intervallet kan vi multiplicera med $x(x+3)$ och får då

$$x + 3 = 3x \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x = 3$$

dvs $x = 3/2$ som ligger i intervallet. Eftersom $f(1) = 1 > 3/4 = g(1)$ ligger $f(x)$ över $g(x)$ till vänster om $x = 3/2$ och tvärtom till höger om $x = 3/2$. För positiva x är $\ln x$ en primitiv funktion till $1/x$ och därmed är $3\ln(x+3)$ en primitiv funktion till $3/(x+3)$. Vi får arean mellan graferna som summan av integralerna

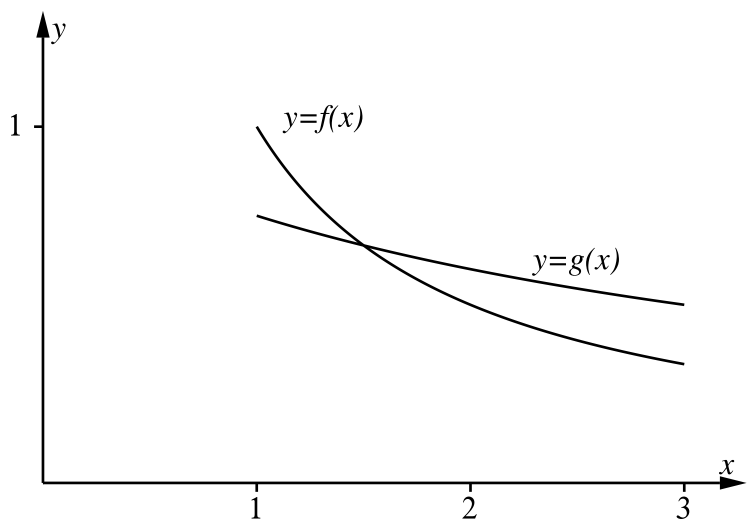
$$\begin{aligned}\int_1^{3/2} \frac{1}{x} - \frac{3}{x+3}\,dx &= [\ln x - 3\ln(x+3)]_1^{3/2} \\ &= \ln(3/2) - 3\ln(3/2+3) - \ln(1) + 3\ln(4) \\ &= \ln 3 - \ln 2 - 6\ln 3 + 3\ln 2 - 0 + 6\ln 2 \\ &= 8\ln 2 - 5\ln 3.\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}\int_{3/2}^{3} \frac{3}{x+3} - \frac{1}{x}\,dx &= [3\ln(x+3) - \ln x]_{3/2}^{3} \\ &= 3\ln(6) - \ln(3) - 3\ln(9/2) + \ln(3/2) \\ &= 3\ln 3 + 3\ln 2 - \ln 3 - 6\ln 3 + 3\ln 2 + \ln 3 - \ln 2 \\ &= 5\ln 2 - 3\ln 3.\end{aligned}$$

Sammantaget blir arean

$$8\ln 2 - 5\ln 3 + 5\ln 2 - 3\ln 3 = 13\ln 2 - 8\ln 3 \approx 0,22.$$



b) Vi låter $t = \cos x$ och får då att $dt = -\sin x\,dx$. När $x = 0$ motsvarar $t = 1$ och $x = \pi$ svarar mot $t = -1$. Allstå får vi

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^4 x\,dx &= -\int_0^{\pi} (1-\cos^2 x)\cos^4 x(-\sin x)\,dx \\ &= -\int_1^{-1} (1-t^2)t^4\,dt \\ &= -\left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}\right]_1^{-1} \\ &= -\left(\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^7}{7} - \frac{1^5}{5} + \frac{1^7}{7}\right) \\ &= -\frac{-7+5-7+5}{35} = \frac{4}{35}.\end{aligned}$$

c) Om vi använder trapetsmetoden på en linjär funktion får vi exakt rätt svar, så det enda vi behöver se på är andragradstermen $f(x) = ax^2$. Det exakta svaret ska vara

$$\int_0^3 ax^2\,dx = \left[a\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27a}{3} - \frac{0 \cdot a}{3} = 9a.$$

Med trapetsmetoden med fyra delintervall får vi delintervallens längd till $\Delta x = (3-0)/4 = 3/4$ och approximationen blir

$$\begin{aligned}\int_0^3 ax^2\,dx &\approx \frac{\Delta x}{2}\left(f(0) + 2f(3/4) + 2f(3/2) + 2f(9/4) + f(3)\right)\\ &= \frac{3}{8}\left(0 + 2 \cdot \frac{9a}{16} + 2 \cdot \frac{9a}{4} + 2 \cdot \frac{81a}{16} + 9a\right)\\ &= \frac{3a}{8} \cdot \frac{0 + 18 + 72 + 162 + 144}{16} = \frac{3a}{8} \cdot \frac{396}{16} = \frac{297a}{32}\end{aligned}$$

Skillnaden mot det exakta värdet är

$$\frac{297a}{32} - 9a = \frac{297a - 288a}{32} = \frac{9a}{32},$$

vilket därmed är det fel som fås. Om vi tar med de andra två termerna i $p(x)$ får vi ytterligare ett bidrag på $9b/2 + 3c$ både i det exakta uttrycket och i approximationen och felet påverkas därmed inte.

Svar:

a) Arean mellan graferna är $13\ln 2 - 8\ln 3 \approx 0,22$ areaenheter.

b) $\int_0^\pi \sin^3 x \cos^4 x\,dx = 4/35$.

c) Felet blir $9a/32$ om vi använder trapetsmetoden med fyra delintervall.

Bedömningskriterier

a)
- Korrekt uppdelning av arean i två integraler, **1 poäng**.
- Korrekta primitiva funktioner, **1 poäng**.
- Korrekt insättning av gränserna, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning inklusive korrekt svar, **1 poäng**.
- Sammanlagt högst tre poäng om svaret ej är angivet med korrekt noggrannhet.

b)
- Korrekt utfört varabelbyte med avseende på integrand och integrationsgränser, **1 poäng**.
- Korrekta primitiva funktioner, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning inklusive korrekt svar, **1 poäng**.

c)
- Korrekt användning av trapetsmetoden, **1 poäng**.
- Korrekt slutsats om felets storlek, **1 poäng**.

Bedömning av presentationen

Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

0p Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.

1p Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.

2p Lösningen har förklarande text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.

3p Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

Egenbedömning

Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömninngskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

Slutgranskning

Skrivningarna slutgranskas och poängsätts av examinator.