KTH Teknikvetenskap

SF1620 Matematik och modeller
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 3, 2007

Uppgift

a) Bestäm derivatan av funktionen

$$g(t) = e^{-t}\left(\sin t - \frac{1}{\cos t}\right), \qquad 0 < t < \pi/2.$$

Ange noggrant vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Bestäm maximum och minimum för funktionen

$$g(x) = 2\sin^3 x + \cos^2 x + 1$$

på intervallet $0 \leq x \leq \pi$. Ange svaren med två decimalers noggrannhet och skissera grafen för funktionen på det givna intervallet. **(4)**

c) Låt $h(x)$ vara den deriverbara funktion som uppfyller $\tan(h(x)) = x$ för alla x i intervallet $-\pi/2 < x < \pi/2$. Använd kedjeregeln för att bestämma derivatan av funktionen $h(x)$. **(2)**

Lösningsförslag

Vi börjar med att derivera den första faktorn, $g(t) = e^{-t}$. Enligt kedjeregeln är

$$g'(t) = (-1) \cdot e^{-t} = -e^{-t}$$

eftersom derivatan av $-t$ är -1 och derivatan av e^t är e^t. Derivatan av den andra faktorn $h(t) = \sin t - 1/\cos t$ beräknas term för term. Derivatan av $\sin t$ vet vi är $\cos t$, medan derivatan av $1/\cos t$ fås genom kedjeregeln

$$\left(\frac{1}{\cos t}\right)' = -\frac{1}{\cos^2 t} \cdot (-\sin t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t}$$

eftersom derivatan av $1/x$ är $-1/x^2$ och derivatan av den inre funktionen $\cos t$ är $-\sin t$. Alltså är

$$h'(t) = \cos t - \frac{\sin t}{\cos^2 t}.$$

Vi använder till slut produktregeln för att derivera funktionen

$$\begin{aligned}
f'(t) &= g'(t)h(t) + g(t)h'(t) \\
&= -e^{-t}\left(\sin t - \frac{1}{\cos t}\right) + e^{-t}\left(\cos t - \frac{\sin t}{\cos^2 t}\right) \\
&= e^{-t}\left(-\sin t + \frac{1}{\cos t} + \cos t - \frac{\sin t}{\cos^2 t}\right) \\
&= e^{-t}\left(\cos t - \sin t\right)\left(1 + \frac{1}{\cos^2 t}\right).
\end{aligned}$$

b) För att hitta exentuella lokala extrempunkter i intervallet letar vi efter nollställen till derivatan. Vi kan derivera funktionen $g(x) = 2\sin^3 x + \cos^2 x + 1$ genom att använda kedjeregeln och får då

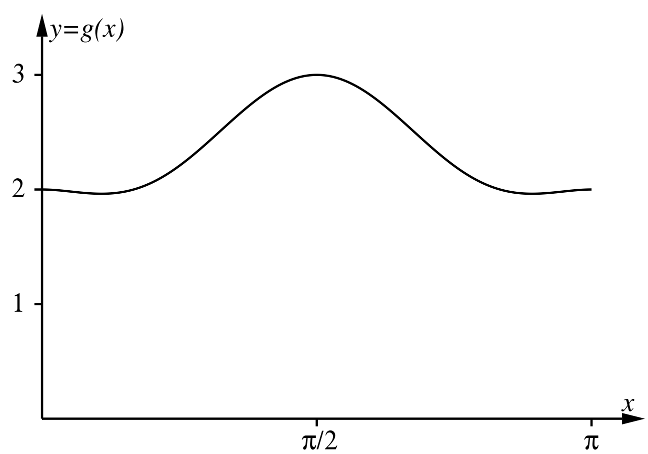
$$g'(x) = (6\sin^2 x)(\cos x) + (2\cos x)(-\sin x) = \sin x \cos x(6\sin x - 2).$$

Denna funktion har nollställen då någon av de tre faktorerna $\sin x$, $\cos x$ eller $6\sin x - 2$ är noll. I det givna intervallet får vi då fem nollställen $x = 0$, $x = \pi$, $x = \pi/2$ samt de två lösningarna till $\sin x = 1/3$, som vi kan kalla $a \approx 0,34$ och $\pi - a \approx 2,80$. De två första nollställena sammanfaller med intervallets ändpunkter och för att hitta det största och det minsta värdet räcker det att jämföra i dessa fem punkter.

$$\begin{aligned}
g(0) &= 2\cdot 0^3 + 1^2 + 1 = 2 \\
g(a) &= 2\cdot\sin^3(a) + \cos^2(a) + 1 = \tfrac{2}{27} + 1 - \tfrac{1}{9} + 1 = \tfrac{2+27-3+27}{27} = \tfrac{53}{27} \\
g(\pi/2) &= 2\cdot 1^3 + 0^2 + 1 = 3 \\
g(\pi - a) &= 2\cdot\sin^3(\pi - a) + \cos^2(\pi - a) + 1 = \tfrac{2}{27} + 1 - \tfrac{1}{9} + 1 = \tfrac{2+27-3+27}{27} = \tfrac{53}{27} \\
g(\pi) &= 2\cdot 0^3 + 1^2 + 1 = 2
\end{aligned}$$

Vi har använt oss av trigonometriska ettan för att se att $\cos^2(a) = 1 - \sin^2(a)$. Det största värdet är 3 och det minsta är $53/27 \approx 1,96$.

Vid $x = 0$ är derivatan noll och värdet för funktionen är 2. Funktionen avtar sedan ned till $53/27$ vid $x \approx 0,34$ och ökar sedan till 3 i mitten av intervallet. Funktionen är symmetrisk kring $x = \pi/2$ eftersom både $\sin x$ och $\cos^2 x$ är det. Vi får att grafen till funktinonen ser ut som



c) Om vi vet att $\tan(h(x)) = x$ för alla x i intervallet $-\pi/2 < x < \pi/2$ kan vi deriera ekvationen och får då enligt kedjeregeln

$$(1 + \tan^2(h(x)))h'(x) = 1.$$

Vi kan nu lösa ut $h'(x)$ ur detta och får då

$$h'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(h(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

eftersom vi vet att $\tan(h(x)) = x$ i intervallet.

Svar:

a) $f'(t) = e^{-t}(\cos t - \sin t)(1 + 1/\cos^2 t)$.

b) Funktionens minimum är $53/27 \approx 1,96$ och dess maximum är $3 = 3,00$.

c) Vi kan beräkna derivatan till $h'(x) = 1/(1 + x^2)$.

Bedömningskriterier

a)
- Korrekt användning av produktregeln, **1 poäng**.
- Korrekt användning av kedjeregeln, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd derivering, **1 poäng**.

b)
- Korrekt analys av nollställena till derivatan, **1 poäng**.
- Korrekt motiverat maximum, **1 poäng**.
- Korrekt motiverat minimum, **1 poäng**.
- Korrekt skisserad graf med avseende på lokala minima, maxima, växande och avtagande, **1 poäng**.

c)
- Korrekt härledning av derivatan för $h(x)$, **2 poäng**.

Bedömning av presentationen

Presentationen av lösningen bedöms med 0-3 poäng enligt följande:

0p Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer, formler och beräkningar utspridda över papperet.

1p Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.

2p Lösningen har förklarande text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas, eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.

3p Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

Egenbedömning

Studenten skall bedöma sin egen lösning enligt de bedömninngskriterier som ges ovan. Bedömningen skall motiveras och eventuella slarvfel identifieras. I de fall lösningen avviker mycket från lösningsförslaget kan bedömningskriterierna vara svåra att tillämpa. I dessa fall får studenten föreslå en helt egen bedömning med motivering. Detta måste markeras tydligt.

Slutgranskning

Skrivningarna slutgranskas och poängsätts av examinator.